Relaciones y Funciones

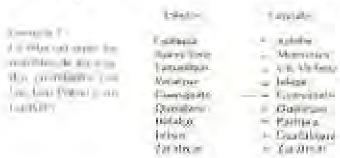
NOCION DE RELACION

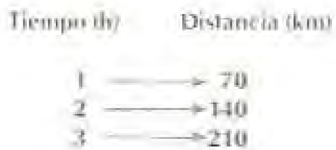
En el ámbito matemático, ¿qué debe entenderse por "relación"? Estudiemos la definición siguiente:

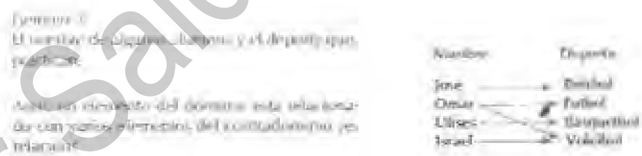
Una relación es una regla de correspondencia que se establece entre los elementos de un primer conjunto (llamado dominio) con los elementos de un segundo conjunto (denominado contradominio o codominio), de tal manera que a cada elemento del dominio corresponde uno o más elementos del contradominio.

Según esta definición, en una relación necesitamos dos conjuntos de datos. Uno llamado dominio (primer conjunto) y otro contradominio (segundo conjunto), y que sus elementos estén asociados. Asimismo, notamos que no se establece ningún tipo de restricción respecto a cómo relacionarse un conjunto con otro.

Existen numerosos ejemplos de relaciones que utilizamos con frecuencia, a continuación te citamos algunos. Para ilustrarlos de una manera más clara, los representaremos por diagramas sagitales (nombrados así porque se utilizan flechas, que en latín se dice sagita), en donde se pueden apreciar ambos conjuntos, denominados dominio y contradominio, cuyos elementos asociados se unen por medio de flechas.







Todos estos ejemplos son relaciones, no podemos descartar ninguno pues, como habíamosmencionado, no existe ninguna restricción en la forma que debea relacionarse.

NOCION DE FUNCION

Una función, como veremos, es un tipo especial de relación. Estudiemos ahora estadefinición:

La función es una relación en que a cada elemento del dominio corresponde uno ysólo un elemento del contradominio.

Aquí sí existe una condición respecto a cómo asociarse, que establece claramenteque todos los elementos del dominio deben estar asociados estrictamente con uno delcontradominio. Veamos otra definición.

Una función f de un conjunto A respecto a un conjunto B es una regla de correspondenciaque asigna, a cada elemento de x del conjunto A, exactamente un elementoy del conjunto B. El conjunto A es el dominio de la función f, y el conjunto B es elcontradominio.

De acuerdo a lo anterior, de las relaciones anteriores ¿cuáles son funciones? Discútelocon tus compañeros.

En el estudio de las relaciones y las funciones utilizaremos algunos conceptos nuevoscuyo significado debe quedarnos suficientemente claro para apropiarnos de ellos yutilizarlos correctamente.

Sigue revisando la imagen y trata de comprender las siguientes afirmaciones que se refieren a ella:

a) El dominio está definido por $D = \{2,4\}$
b) El contradominio por $C = \{a,b,c,d\}$
c) El rango está determinado por $I = \{a,b\}$
d) "a" es la imagen del argumento 2, "b" es la imagen del argumento 4.

Considerando estos conceptos, podemos definir a una función como una relación tal,en la que a cada argumento le corresponde únicamente una imagen. Si esto no ocurreentonces la relación no es función.

Analiza el siguiente cuadro en donde se expresan las diferencias y similitudes entreuna relación y una función:

RELACIÓN	FUNCIÓN
Cada elemento del dominio puede estar asociado a 0, 1, 2 o mas elementos del contradominio.	Cada elemento del dominio debe estar asociado a uno y solo un elemento del contradominio.
Cada elemento del contradominio puede no estar asociado a ningun elemento del dominio.	Cada elemento del contradominio puede no estar asociado a ningun elemento del dominio.
Cada elemento del contradominio puede estar asociado a uno o mas elementos del dominio.	Cada elemento del contradominio puede estar asociado a uno o más elementos del dominio.

NOTACION DE FUNCION

Se utiliza la notación $f: A \rightarrow B$, para referirnos a una función entre el conjunto A deldominio y el B del contradominio. Se lee "la función f de A a B".

Por ejemplo, la $F: P \rightarrow E$ es la relación en la que a cada persona se le asocia con suedad, es función porque cada persona no puede tener dos edades al mismo tiempo.

REPRESENTACIONES DE UNA FUNCION Y UNA RELACION

Hasta ahora hemos representado las funciones y relaciones por medio de diagramassagitales (método de flecha), sin embargo existen otras formas: por medio de tablas,como conjunto de pares ordenados, gráfica y ecuación.

Retomemos un ejemplo antes mencionado, en donde relacionamos el tiempo y ladistancia recorrida por un automóvil de la Cd. de San Luis Potosí a la Cd. de Querétaro,para mostrar estas representaciones.

Representación sagital

Tiempo (h) Distancia (km)

1 → 70
2 → 140
3 → 210

Tabla

Tiempo (h)	Distancia (km)
1	70
2	140
3	210

Pares ordenados
f = {(1,70), (2,140), (3,210)}

Ecuación
$y = 70x$

Gráfica

Recuerda que convencionalmente se utiliza la letra x para designar los valores deldominio y y para los del contradominio. En el plano cartesiano los valores de x se ubican en el eje horizontal y los de y en el vertical. Es importante que analices estasrepresentaciones y reconozcas que muestran la misma variación entre los valores dedos conjuntos.
Pero, ¿todas las funciones y relaciones se pueden representar de estas cinco formas?Analicemos ahora la función entre Estados de la República Mexicana que colindancon San Luis Potosí y sus capitales.

Representación sagital

Coahuila → Saltillo
Nuevo León → Monterrey
Tamaulipas → Cd. Victoria
Veracruz → Jalapa
Guanajuato → Guanajuato
Querétaro → Querétaro
Hidalgo → Pachuca
Jalisco → Guadalajara
Zacatecas → Zacatecas

Tabla

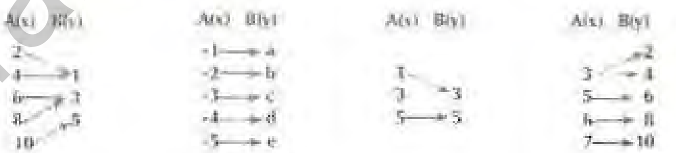
Estados	Capitales
Coahuila	Saltillo
Nuevo León	Monterrey
Tamaulipas	Cd. Victoria
Veracruz	Jalapa
Guanajuato	Guanajuato
Querétaro	Querétaro
Hidalgo	Pachuca
Jalisco	Guadalajara
Zacatecas	Zacatecas

Las representaciones en pares ordenados, gráfica y ecuación son exclusivas para conjuntosnuméricos, por lo tanto, esta función solo tiene las dos representaciones anteriores.

Es muy importante que comprendas que no todas las relaciones y funciones, a pesarde ser dos conjuntos numéricos los que se relacionan, tienen ecuación: por ejemplo,si cada hora, durante un día completo registras la temperatura ambiente, elaboras una tabla y construyes una gráfica, observarás que no existe ninguna ecuación que seajuste a todos los puntos que obtienes. Este hecho no es aislado, en realidad la mayoría de los fenómenos que ocurren en la naturaleza varían de forma irregular, y para suestudio solo se hacen aproximaciones de ecuaciones que se ajusten lo más posible, para analizar su comportamiento, hacer predicciones y tomar decisiones al respecto.

Hemos visto que en una función, para cada argumento existe uno y solo un valor parala imagen, es importante reconocer esta característica en las diferentes representacionesde una relación para establecer si es función o no.

Si la relación está representada por un diagrama sagital, cada argumento debe teneruna flecha, si al menos un argumento carece de esta o bien tiene dos o más, entoncesla relación no es función.



Sí son funciones porque a cada argumento corresponde una imagen.

No son funciones porque en el primer caso a un argumento no le corresponde ninguna imagen y en el segundo, a un argumento corresponden dos imágenes.

Algo muy similar ocurre en la tabla, solo que en esta no hay flechas, cada elemento está relacionado directamente con el que está en la columna contigua. Analiza losSiguientes tabuladores:

Tabulador 1

x	y
2	1
4	1
6	3
8	3
10	5

Tabulador 2

x	y
-1	a
-2	b
-3	c
-4	d
-5	e

Tabulador 3

x	y
1	3
3	Indet.
5	5

Tabulador 4

x	y
3	2
3	4
5	6
6	8
7	10

Siendo las mismas relaciones apreciamos nuevamente que solo los dos primeros tabuladores representan funciones. El tabulador 3, muestra un argumento con imagen indeterminada, por ello no es función, a menos que este elemento pueda ser eliminado del dominio. ¿Porque no es función el tabulador 4?

DOMINIO, CONTRADOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION

El hombre creo las matemáticas con la finalidad de entender cómo funciona el mundo en términos numéricos. A partir de ahora nos enfocaremos al estudio de funciones numéricas, expresadas mediante tablas, ecuaciones y gráficas, y las concordancias que existen entre las tres representaciones.

Una ecuación es una expresión matemática que puede expresarse en un plano cartesiano como una curva formada por todos los puntos que la satisfacen, cuya cantidad puede ser infinita. Sin embargo, cuando esta representa situaciones de la vida real, es importante definir el dominio en la que es válida, de acuerdo al contexto.

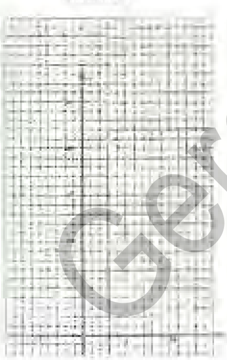
Lee atentamente los siguientes problemas:

A. José tiene $25, si en la lonchería únicamente venden tortas de $5; expresa mediante tabla, gráfica y ecuación, la función entre el número de tortas que compra y lo que paga por ellas.

B. Una cubeta vacía de una capacidad de 25 litros, se pone a llenar con una llave cuyo gasto es de 5 litros/minuto, expresa mediante tabla, gráfica y ecuación, la función entre el tiempo que transcurre y la cantidad de agua almacenada.

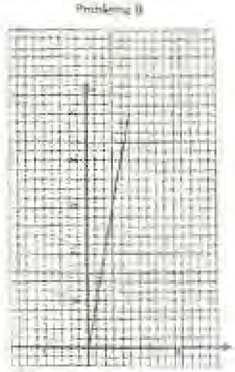
Ambos problemas parecen iguales, la diferencia está en el dominio, diferencia queapreciaras notablemente en la gráfica.

Problema A



x N° de tortas	y Costo total $
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

Problema B



x Tiempo (min)	y Cantidad de agua (litros)
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

Para establecer esta diferencia existen notaciones distintas para el dominio, la notación que corresponde al primer caso es de conjunto, de tal manera que el dominio y contradominio quedan especificados como **D** = {0, 1, 2, 3, 4, 5} y **C** = {0, 5, 10, 15, 20, 25} donde solo son parte de la función los elementos mencionados, en el segundo caso, se expresa como **D** = [0,5] y **C** = [0, 25] e incluye no solo el 0 y el 5, sino también sus valores intermedios, al igual que en el contradominio.

CLASIFICACION Y TRANSFORMACION DE FUNCIONES

Tipos de funciones

El uso de las funciones para construir modelos de la vida real es de suma importancia para cualquier área de conocimiento. En efecto, para poder hacer un uso adecuado, debes poseer conocimientos que te permitan su correcto manejo algebraico y reconocer, a partir de la ecuación, las características de su representación gráfica y su interpretación.

En virtud de lo anterior, en este tema nos dedicaremos a analizar algunas de las características más importantes de las funciones que permiten su clasificación. En la página siguiente se presenta de manera muy general un esquema de la forma en que se clasifican las funciones, revísalo con atención.

A continuación citaremos las características de cada clasificación. Aunque más adelante tendrás la oportunidad de estudiarlas con detalle, te sugerimos que construyas las gráficas de algunas funciones para que te familiarices con ellas. Para referirnos a los valores de *y* (variable dependiente) utilizaremos de aquí en adelante la palabra *función* y para los valores de *x* (variable dependiente) utilizaremos la palabra *variable*.

POR LAS OPERACIONES PARA OBTENER SUS VALORES

Funciones Algebraicas

Como su nombre lo indica, son aquellas que para obtener su valor se utilizan operacionesalgebraicas (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces) depolinomios, se dividen en poligonales, racionales e irracionales.

A) FUNCION POLINOMIAL

Es aquella de la forma: f(x) = a0xn + a1xn-1 + ... + an-1x + anx0
Siendo a0, a1,..., an constantes y n ∈ N, su dominio son todos los reales.
Ejemplos: f(x) = 8x+2,
g(x) = x2-2x-5
h(x) = 3x3-3

En esta clasificación encontramos:

a) La función constante: f(x) = k
Donde k es una constante, su grafica es una recta horizontal, cuya ordenada de origenes k.

b) La funcion identidad: f(x) = x

El argumento y la imagen son iguales, su grafica es una recta cuya ordenada deorigen es cero y su inclinación respecto al eje de las abscisas es de 45°.

c) Función lineal: f(x) = mx + b
Su grafica es una recta, los parámetros m y b, se relacionan con la pendiente y laordenada de origen.

d) Función cuadrática: f(x) = ax2 + bx + c
En donde a ≠ 0. Su grafica corresponde a una parábola cuyo eje focal es paralelo aleje de las ordenadas.

e) Función cubica: f(x) = ax3 + bx2 + cx + d
En donde a ≠0. Su grafica corresponde a una senoidal.

B. FUNCIONES IRRACIONALES

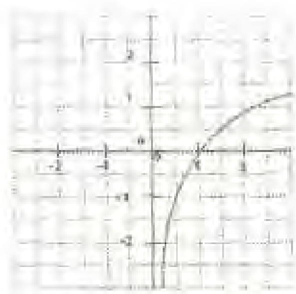
Se identifican por poseer raíces de expresiones que involucran a la variable, por ejemplo:

f(x)= $\sqrt{x-4}$ f(x)= $\sqrt[3]{2x}$ f(x)= $\sqrt{3x+3-2x+1}$

Funciones Trascendentes

Son aquellas que no son algebraicas, incluye a las funciones trigonométricas (seno,coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante), trigonométricas inversas, exponenciales(en las cuales la variable está en el exponente) y logarítmicas. A continuación te mostramos algunos ejemplos:

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$

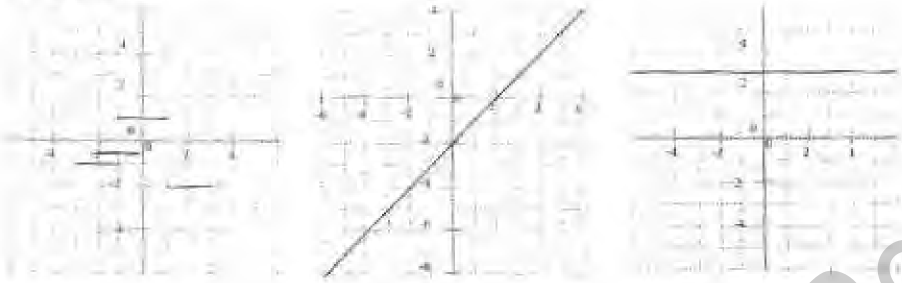


Probablemente estas funciones exponenciales y logaritmicas no te sean familiares,pues no has tenido contacto con ellas, por eso te mostramos las gráficas solo a manerade ilustración. Más adelante las estudiaras a fondo y comprenderás las nociones quecada una de ellas implica.

POR SUS GRAFICAS

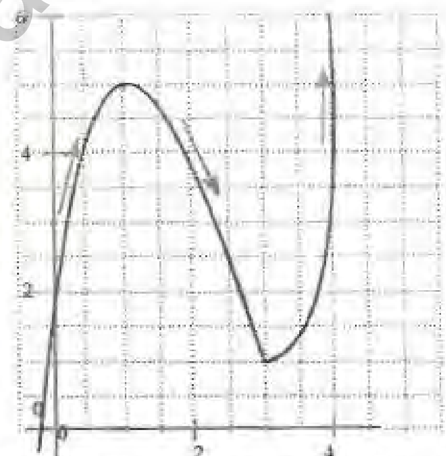
Funciones continuas y discontinuas

Observa las siguientes graficas:



Se dice de manera intuitiva que cuando la gráfica de una función puede dibujarsesin despegar el lápiz del papel, entonces es una función continua, de lo contrario esdiscontinua.

Funciones crecientes y decrecientes



En la siguiente grafica puedes observar que existen variaciones en los valores de la variable y la función, de hecho esa es la importancia de las gráficas, hacer evidentes los cambios que existen. Intuitivamente para determinar si una gráfica es creciente o decreciente, recorre la gráfica con la punta de tu lápiz de izquierda a derecha y mantente atento a los valores que toma *y*, por ejemplo, en la gráfica se observa que los valores de *y* crecen primero, después decrecen y por ultimo vuelven a crecer. Existen dos puntos que marcan en donde dejade crecer y comienza a decrecer (1,5) y otro en el cual deja de decrecer para crecer de nuevo, (3,1). La notación para expresar esto, está dado bajo intervalos de *x*, de tal manera que para esta grafica decimos que:

CRECE: $(-\infty,1)$, DECRECE: $(1, 3)$ y CRECE: $(3, \infty)$

De los puntos (1,5) y (3,1), solo utilizamos el 1 y el 3, correspondientes a los valoresde *x*. Para definir estas variaciones graficas te recomendamos que primero ubiquesestos puntos, llamados puntos críticos, para después establecer los intervalos tomandocomo referencia los valores de la variable.

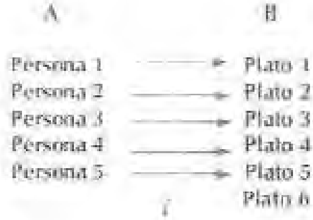
La grafica de una función puede ser solo creciente, solo decreciente, ambas o constante.

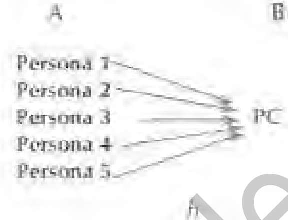
POR LA ASOCIACION ENTRE SU DOMINIO Y CONTRADOMINIO

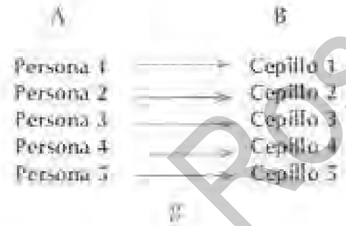
Analicemos la siguiente situación: En la casa de una familia de cinco elementos seencuentran 6 platos en la alacena, una computadora en la sala y un vaso con cinco cepillosdentales en el baño. Es lógico pensar que cada elemento de la familia (conjuntoA) usa, al momento de una comida, solamente un plato, que toda la familia utiliza lamisma computadora y que cada miembro posee solo un cepillo del vaso y que estees usado solo por él.

Los siguientes **diagramas sagitales** ilustran los casos mencionados:

Las tres relaciones presentadas son funciones, sin embargo los elementos de los conjuntostienen diferentes formas de asociarse. En la primera cada elemento del dominiotiene una imagen diferente en el contradominio, esta función es **inyectiva** (uno a uno);en la segunda, cada elemento del contradominio corresponde a por lo menos un valor del dominio, esta función es **suprayectiva (sobre)**, y en la última cumple con ambascondiciones, esta función en **biyectiva (biunívoca)**.







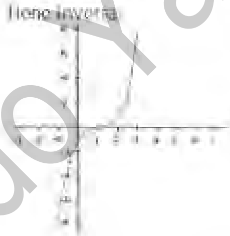
Funciones Inversas

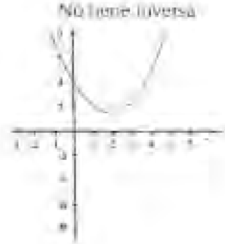
Como hemos aprendido, la condición imprescindible para poder llamar función a una regla matemática que relaciona dos conjuntos *A* y *B*, es que cada elemento del conjunto de salida *A* (dominio) tenga un elemento de correspondencia y solo uno en el conjunto de relación*B* (contradominio).

En resumen, *una función inversa se obtiene de intercambiar el dominio y rango de una función*, sin embargo, la inversa no siempre es función. Para obtener la inversa en un conjunto de pares ordenados, también se intercambian los valores de las variables *x* y *y*.

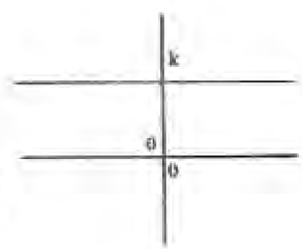
A= {(x, y)} y A-1={(y, x)}

Gráficamente sabemos que una función tiene inversa si cualquier línea horizontal trazada sobre la gráfica la intersecta solo una vez, pues esto garantiza que la función es biyectiva.





Funciones Especiales

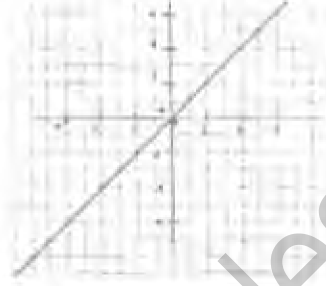


FUNCION CONSTANTE

Es una funciónque permanece constante a pesarde los valores de la variable, se define por *f(x)=k*,en donde *k* es una constante real. Su grafica estadeterminada por una recta horizontal cuya ordenadaal origen es precisamente *k*.

FUNCION IDENTICA

La funciónidéntica, asigna a cada valordel argumento, el mismo valor dela imagen; su ecuaciónestá dada por$f(x)=x$ y su grafica es una recta quepasa por el origen con un ángulo deinclinación respecto al eje x de 45°



FUNCION VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número se representa por medio de dos líneas verticales, por ejemplo |a|, se lee, "el valor absoluto de a", y se define por:

Es decir, se trata de hacer positivo al número si es negativo, o dejarlo positivo si es Positivo. Por ejemplo, |-3|=3, |0|=0, |3|=3.

FUNCIONES COMPUESTAS

En un mismo plano cartesiano podemos graficar varias funciones, por ejemplo:

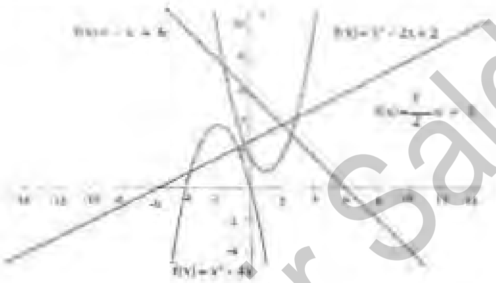
Cada una por si misma es función, pero agrupadas, es decir, considerándolas todas a la vez, no lo son, pues para cada valor de la variable, corresponden 4 valores diferentes.

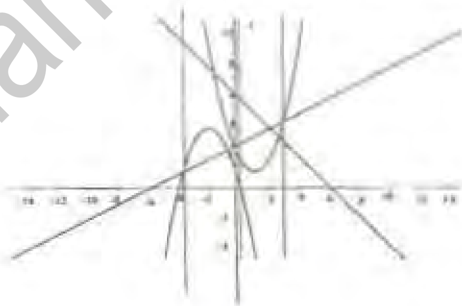
$f(x)=\frac{1}{2}x+3$

$f(x)=-x+6$

$f(x)=x^3-4x$

$f(x)=x^2-2x+2$





Por ejemplo a x=-2, corresponde y=2, y=4, y=8, y y=10. Sin embargo, a partir de ellas podemos construir lo que se llama una función compuesta formada por varias expresiones algebraicas. Para esto, es necesario dividir el eje x en intervalos consecutivos, por ejemplo:

Los intervalos que muestra la ilustración quedaron definidos por (-∞,-4), (-4,-1), (-1,3)y (3, ∞). Observa que los números -4, -1 y 3 no se están considerando en ningún intervalo y ello es necesario, por eso, definiremos los intervalos como: (-∞,-4], (-4,-1), [-1,3] y (3,∞).

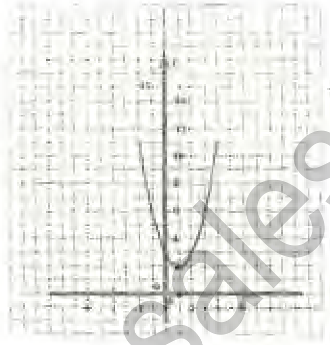
FUNCION ESCALON

Es una función compuesta por funciones constantes, analiza el siguiente ejemplo:

En el sistema EMSaD, las calificaciones finales aprobatorias se obtienen de la siguiente manera; si el alumno obtuvo una calificación igual o mayor a 6 y menor que 6.5, su calificación se redondea a 6, si obtuvo una calificación igual o mayor a 6.5 y menor que 7.5, su calificación se redondea a 7, y así sucesivamente.

Una función expresada en su forma gráfica, puede ser transformada modificando su posición en el plano cartesiano, haciendo translaciones o reflexiones respecto a algún eje. Estos cambios generanmodificaciones también en la ecuación y tabulador. Para analizar esto, tomemos como base la siguiente función: $f(x)=x^2-2x+3$

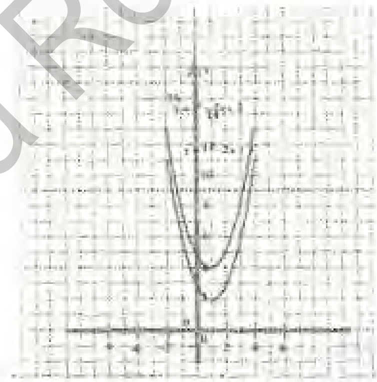
x	y
-2	11
-1	6
0	3
1	2
2	3
3	6
4	11



TRANSLACIONES VERTICALES

Si trasladamos cada uno de los puntos de la gráfica 2 unidades hacia arriba, observamos que el valor de la abscisa en cada uno no se modifica, por ejemplo: el punto(2,3) queda ubicado en (2,5).
Analiza el tabulador y observa la gráfica.

x	y
-2	11 + 2
-1	6 + 2
0	3 + 2
1	2 + 2
2	3 + 2
3	6 + 2
4	11 + 2



Ahora bien, para encontrar la ecuación de la nueva gráfica también es necesario hacer la misma operación (sumarle dos unidades)
$f(x)=x^2-2x+3$
$h(x)=x^2-2x+3+2$
$h(x)=x^2-2x+5$

TRANSLACIONES HORIZONTALES

Tomemos nuevamente la función $f(x)=x^2-2x+3$ y traslademos su grafica 2 unidades a la izquierda.

Para obtener la ecuación de la nueva grafica consideremos la siguiente regla:

-Desplazamiento horizontal de c unidades hacia la izquierda $h(x) = f(x+c)$
-Desplazamiento horizontal de c unidades hacia la derecha $h(x) = f(x - c)$

Para calcular la ecuación de la nueva grafica tomamos $c = 2$ y $h(x) = f(x+c)$
$f(x)=x^2-2x+3$
$h(x)= (x+2)^2-2(x+2)+3$
$h(x)= x^2 + 4x + 4 - 2x - 4 + 3$
$h(x)= x^2 + 2x + 3$

FUNCIONES POLINOMIALES

A lo largo de tu vida estudiantil has trabajado con números, los cuales has podido sumar, restar, multiplicar, dividir e incluso, sacar radicales y potencias; pero al cursar secundaria y ahora que cursas tu educación media superior te diste cuenta que podías realizar operaciones con letras y números a la vez, a lo cual le llamamos *álgebra*. Específicamente en la unidad dos de *Matemáticas I* estudiaste los polinomios en una sola variable, aprendiste a realizar operaciones con ellos e incluso, los usaste para resolver algunos problemas prácticos. Posteriormente en *Matemáticas III* estudiaste algunos temas de GeometríaAnalítica la cual se basa en un sistema de ejes coordenados.

Mencionamos lo anterior, porque en esta unidad estudiaremos las funciones polinomiales, que se basan en polinomios y que analizaremos desde la perspectiva de la geometríaanalítica, haciendo uso del concepto de función que ya abordaste en la unidad anterior.

Concepto de Función Polinomial

Una función polinomial tiene la forma f(x)=anxn+an-1xn-1+an-2xn-2 +...+a0 donde *n* es un entero positivo y los números a0, a1, a2, a3,..., an son constantes y son coeficientes del polinomio. El domino de cualquier función polinomial es el conjunto de los números reales (R); si el primer coeficiente an≠0 entonces el polinomio será de grado *n*.

Cabe aclarar que el **dominio** y **dominio de definición** no son lo mismo, ya que el primer término se refiere a todos los valores en general que puede tomar una función; mientras que el *dominio de definición* es limitado, ya que este depende de la función específica; En otras palabras, si graficamos esas coordenadas obtendremos un segmento de recta como gráfica que inicia en x=0y termina en x=15

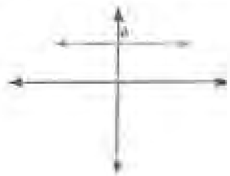
En una función polinomial, *n* (exponente de la literal) se considera como numeropositivo, ya que si *n* fuera fraccionario x estaría dentro de un radical; y si *n* es negativa,entonces estaría en el denominador y formaría parte de las funciones racionales.Observa las siguientes funciones:

FUNCIÓN	CARACTERÍSTICAS
$f(x)=5x^4-8x-3$	Es una función polinomial de grado 4, su coeficiente principal es 5 y el término constante es -3
$h(x)=\frac{x+3}{x+8}$	Es una función racional
$f(x)=\sqrt{41}x^7-\frac{3}{4}x$ [illegible]	Es una función polinomial de grado 7, su coeficiente principal es $\sqrt{41}$ y el término constante es -
$g(x)=\frac{7x^5-9x^2+3x-1}{2}$	Es una función polinomial de grado 5, su coeficiente principal es 7/2 y el término constante es -1/2
$h(x)=4^3\sqrt{x^2}-11$	Es una función radical donde el exponente de la variable x es 2/3, por lo que no forma parte de las funciones polinomiales.

La Función Constante

Es una función polinomial de grado CERO, es decir, es de la forma **f(x)=a0**, donde **a0**, es una constante. En la siguiente gráfica sagital podemos verla de forma más simple:

La función constante **f(x)=a** tiene como dominio todos los Reales y como Contradominio (Rango) un único valor a.



$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow a$

Función Lineal

Es una función polinomial de grado UNO y tiene la forma **f(x)=a1x+a0**, donde **a1≠0**, la principal característica es que su gráfica es una recta y, además, cuando se presenta una tabla de una función lineal, esta tiene la característica de que cuando la variable va creciendo de uno en uno, la función aumenta o disminuye de manera constante. Dicho en otras palabras, su razón de cambio es constante. Esta razón de cambio es a lo que le llamamos **pendiente**. De forma general la expresión analítica de la función lineal será**f(x)=mx+b**, donde m es la *pendiente* o la constantede crecimiento o decrecimiento, y b es la *ordenada al origen* o valor de la funcióncuando la variable vale cero.

Función lineal f(x)=mx+b:R→Rdonde **m≠0**

Como mencionamos anteriormente, la expresiónanalítica de una función lineal es **f(x)=mx+b**, esta tiene dos parámetros (*m* y *b*), dependiendo de sus valores, la gráfica tiene un cierto comportamiento.

El modelo de una función lineal tiene innumerables aplicaciones en economía, física, biología, mercadotecnia, etc. Por ejemplo el valor contable de ciertos productos que se van depreciando año con año, el costo total de un artículo, el interés simple, entre otros. A continuación veremos ciertas situaciones que nos llevan a modelar una función lineal, te invitamos que las analices con tu asesor y resuelvas las que están marcadas como B y C.

Mi tía Anita, que vive en Durango, tiene una cocina económica y quiere saber el costo total por la producción de cierto número de tamales; sabiendo que el costo fijo por la producción diaria es de $220 a lo cual debe agregar $2.00 por cada tamal adicional.

X	Y
#tamales (t)	Costo total
0	C(t)
1	220
2	222
3	224
	226
t	2t + 220

a) ¿Cuálsería la expresiónanalítica que representara esta situación?
b) ¿Cuantos tamales tendrá que elaborar para que el costo neto de cada tamal seade $3.00?

a) Como podemos darnos cuenta el costo inicial de un pedido sería de 220 pesos, con esto tendríamos el valor de *b* (intersección con el eje *y*) y el valor de *m* que es la constante de crecimiento que en este caso es 2; por lo tanto, si la expresiónanalítica de una función lineal es de *y= mx + b* tendremos que: **y=2x + 220**, es decir:

Costo total=(# tamales) + 220
C(t)=2t+220

Función Cuadrática

La función cuadrática, es una función polinomial de grado DOS, y tiene la forma **f(x)=a2x2+a1x+a0**, donde **a2≠0**. La principal característica es que su grafica es una parábola vertical; donde el dominio y el rango son los reales, la ecuación de una función cuadratica se acostumbra expresarse como: **f(x)=ax2+bx+c; R→R** donde **a≠0**

Para graficar una función cuadrática basta con tabular la función, dándole valores arbitrarios a *x* y así obtener los de *f(x)*. Todas las parábolas son simétricas con respecto a una línea recta llamada **eje de simetría o eje focal**; el punto donde se cruza el eje focal y la curva (parábola) es llamado *foco*, como ya se había visto en la unidad cuatro de *Matemáticas III* (recordemos que los elementos que definen por completo una parábola son 6: vértice, foco, eje focal, directriz, lado recto y parámetro).

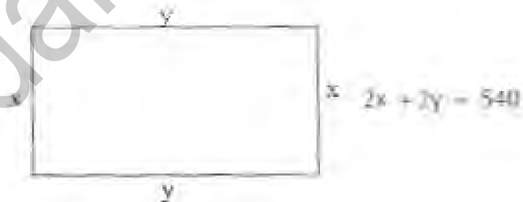
Parábola vertical hacia abajo (cóncava negativa), donde el coeficiente principal a<0, el eje de simetría es la línea punteada y el punto marcado es el vértice, en dicho punto existe un máximo valor.

Parábola vertical hacia arriba (cóncava positiva), donde el coeficiente principal a>0, el eje de simetría es la línea punteada y el punto marcado es el vértice, en dicho punto existe un mínimo valor.

Modelos Cuadráticos y Problemas Sencillos de Máximos y Mínimos

Al igual que la función lineal, la funcióncuadraticatambien tiene innumerables aplicaciones, ya que esta puede ser el resultado de modelar cierta situación, como las que se muestran a continuación:

Retomaremos un ejercicio anterior: Se desea cercar el terreno de forma rectangular donde se está construyendo un parque ecológico que se encuentra en I. Allende, municipio de Gpe. Victoria, de tal manera que su área sea la máxima posible. Se dispone de 540 metros de cerca.



Determinar la expresión algebraica de la función que describe el problema y resolverlo:

Por lo tanto y=270 - x, Si para obtener el área se multiplica el largo por el ancho, obtenemos que:

A=xy, para trabajar con una sola variable sustituimos en esta ecuación la ecuación anterior y nos queda:

A=x(270 - x)
A=270x - x2

Ahora bien, la funcióncuadrática**f(x)=270x - x2**, transformándola a su forma estándar obtenemos **f(x)= - (x – 135)²+18225**, como a<0, la parábolaabria hacia abajo y por lo tanto existe un máximo, el cual seria **18225**, cuando x toma el valor de **135**; Asi que el terreno tendrá un áreamáxima de **18,225 m2** cuando su ancho (x) tenga una longitud de **135 m**

Ancho =x = 135
Largo =270-x = 270-135 = 135

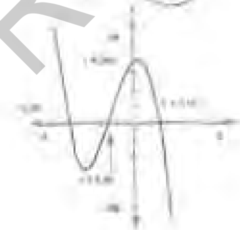
Funciones Polinomiales de Grado Tres y Cuatro

La función cubica, es una función polinomial de grado TRES y tiene la forma f(x)=a3x3 + a2x2 + a1x + a0 , donde a3 ≠0 , de manera análoga es la función de grado CUATRO f(x)=a4x4 + a3x3 + a2x2 + a1x + a0 donde a4 ≠0; el dominio y rango de estas funciones son los reales.

Para graficar este tipo de funciones tabulamos con un número considerable de elementos en el dominio (x), para obtener una grafica un poco mas confiable, ya que estas funciones son más difíciles de trazar que las anteriores.

Enseguida se muestran las gráficas de algunas funciones polinomiales de grado tres ycuatro.

A. Esta es la grafica la función polinomial $f(x)= 2x^4 - 20x^2 - 10x - 4$ que es de grado 4



B. La grafica a la derecha muestra una función cubica $f(x)= -4x^3 -16x^2+9x+36$, que tiene Tresraices, cuyos valores son:
$x1= -4; x2= -1.5; x3=1.5$;
El procedimiento para obtener las raíces lo veremos mas adelante.

DIVISION SINTETICA

Para ilustrar el procedimiento de la divisiónsintética, resolveremos un ejemplo haciendo hincapié en que esta división solo se aplica a divisiones con polinomios de una sola variable donde el divisor es de la forma x-r.

- Procedimiento de la divisiónsintética (Regla de Ruffini)

a. El dividendo debe estar ordenado de forma decreciente.
b. En el primer renglón se ponen solo los coeficientes del dividendo, sustituyendo por cero las potencias faltantes entre un término y otro del polinomio.
c. A la derecha del último elemento del dividendo se escribe el simétrico de r separado por una linea vertical.
d. Se traza una linea horizontal que separa al segundo y tercer renglón.
e. El primer término del dividendo se escribe como el primer término del tercer renglón.
f. Después se multiplica el primer término del tercer renglón por el divisor y el producto resultante se escribe en el segundo renglón y en la columna dos.
g. Se suman los términos de la segunda columna y el valor resultante se multiplica por el divisor, poniéndose dicho resultado en la tercera columna.
h. Este proceso se sigue hasta sumar los elementos de la última columna del divisor.
i. Los coeficientes que quedan en el tercer renglón, son los coeficientes del cociente, y el último elemento del tercer renglón es el residuo.

Función Racional

Una función racional r(x) es una función que se expresa mediante el cociente de dos Funciones polinómicas y se escribe de la siguiente manera

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_2x^2+b_1x+b_0}$$

Para valores de x en los cuales el denominador no es cero con an.bm≠0.

Graficas de Funciones Racionales

Asintota. Una recta es asintota de una curva (la función racional)si la distancia entre un punto sobre la curva y la recta se aproxima a cero a medida que el punto se aleja del origende coordenadas.
Esta definición condiciona a la curva a extenderse indefinidamente cada vez más entodo el plano a medida que las curvas y la recta se acerquen más y más una de laotra.
Es importante observar que si la función racional tiene asintotas su construcción permitirá trazar un bosquejo más preciso de la gráfica de la función racional.
Si la recta es paralela o coincide con el eje Y la asintota es horizontal, si es paralela ocoincide con el eje X la asintota es vertical y por ultimo si la recta no es perpendiculara ninguno de los ejes, la recta asintota es inclinada (oblicua).
Para llevar a cabo la identificación de la forma en que estas rectas se sitúan en relación con la gráfica de la función racional, necesitamos de varios resultados respecto a losgrados de los dos polinomios que conforman la función.

Resultado. Asintotas Horizontales

Ejemplo A.

$r(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $n=2=m$

$a_n=1, b_m=1$

Asíntota $y=\frac{a_n}{b_m}=\frac{1}{2}=1\neq 0$

Ejemplo B.

$r(x)=\frac{2x+1}{3x^2-3}$, $1=n<m=2$

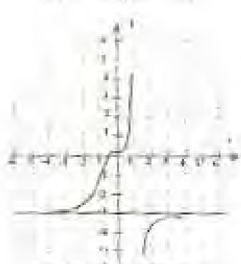
Asíntota $y=0$ el eje X

Ejemplo C.

$r(x)=\frac{3x^3}{(1-x^3)}$, $n=3=m$

$a_n=3, b_m=-1$

Asíntota $y=\frac{a_n}{b_m}=\frac{3}{-1}=-3\neq 0$

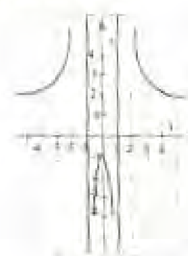


Resultado. Asintotas Verticales

Ejemplo 1

$r(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

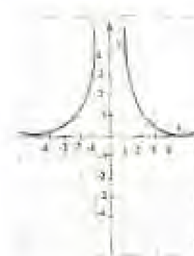
Asíntotas $x=r=1,-1$ ya que $q(1)=0$ y $q(-1)=0$ en el polinomio $q(x)=(x-1)(x+1)$



Ejemplo 2

$r(x)=\frac{2x+1}{2x^4+2x^2}$

Asíntotas $x=r=0$, ya que es el cero de: $q(x)=2x^4+2x^2=2x^2(x^2+1)$



Ejemplo 3

$r(x)=\frac{3x^3}{(1-x^3)}$

Asíntota $x=r=1$, pues el 1 es el cero de $q(x)$ con x^2+x+1
Siempre positivo